VI. Influence électrostatique

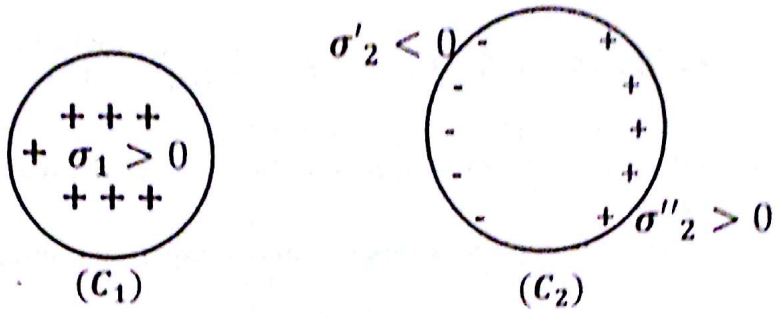
1. Influence de deux conducteurs chargés

a) Influence partielle

Soient 2 conducteurs (C_1) et (C_2) .

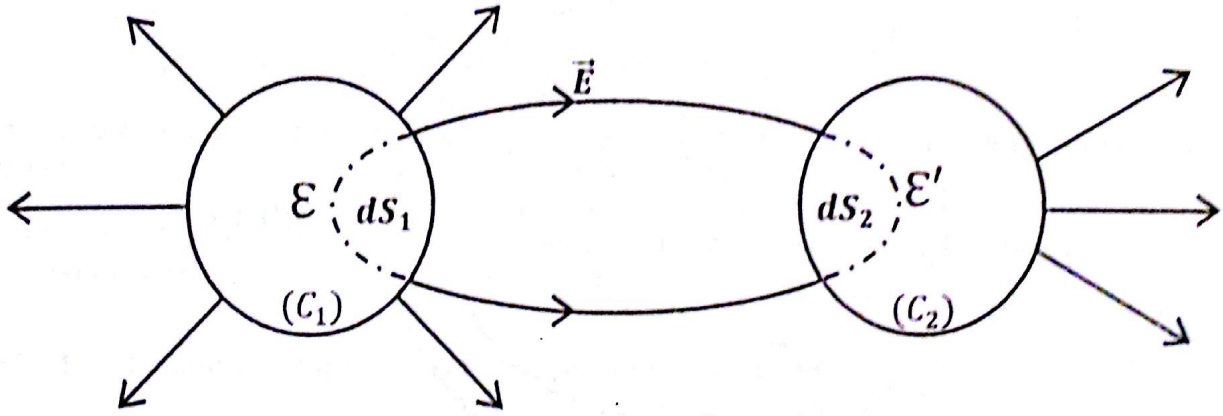
On suppose (C_1) chargé avec une densité $(\sigma_1) > 0$ et (C_2) neutre.

D'après le phénomène d'influence (**voir chapitre 1**).



Dés que l'on approche (C_1) de (C_2) il y a apparition sur (C_2) de charges négatives de densité $\sigma'_2 < 0$, et de charges positives de densité $\sigma''_2 > 0$.

Les densités de charges apparues sur (C_2) sont de signes contraires mais égales en valeurs absolues pour assurer la neutralité de (C_2).



Les lignes de champ partent de (C_1) perpendiculairement à la surface et aboutissent à (C_2) perpendiculairement à la surface de (C_2).

Un tube de champ s'appuyant sur dS_1 découpe sur (C_2) un élément de surface dS_2.

Surface de Gauss : tube et les surfaces $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ prises à l'intérieur de (C_1) et (C_2).

Scanned by CamScanner

- $\vec{E}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{dS_L}$ c'est-à-dire $\vec{E}.\overrightarrow{dS_L} = 0$.
- $\vec{E}$ nul à l'intérieur de (C_1) et (C_2).

Le théorème de Gauss donne :

$$\iint_{\substack{surface \\ Gauss}} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = 0 = \frac{\mathcal{E}_{q_{int}}}{\mathcal{E}_o}$$

$$\Longrightarrow \mathcal{E}_{q_{int}} = 0$$

$$\Longrightarrow \sigma_1 dS_1 + \sigma_2 dS_2 = dq_1 + dq_2 = 0$$

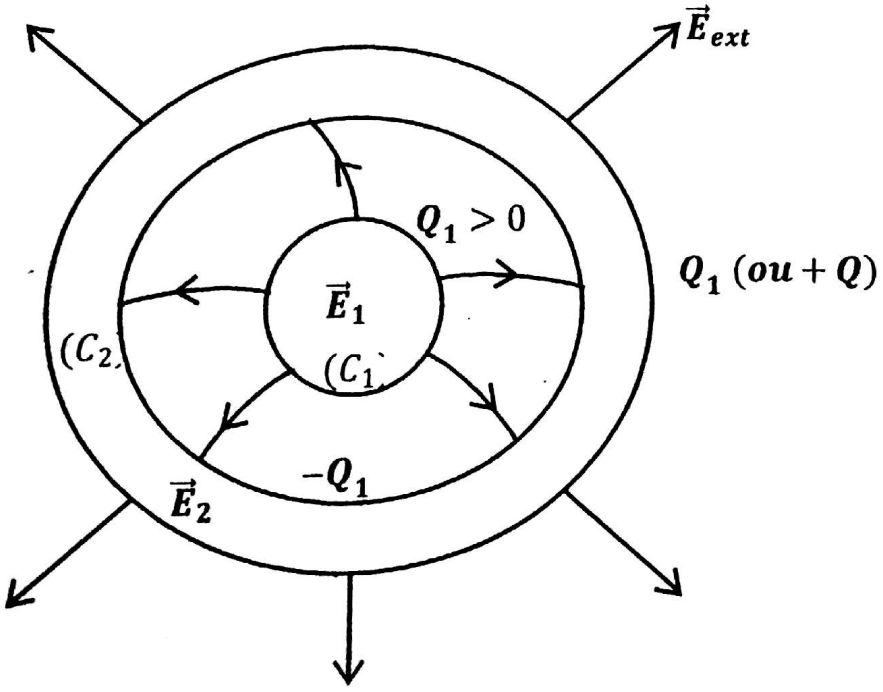
Les charges dq_1 et dq_2 qui se font face sur deux éléments de surface correspondants sont égales et apposées.

L'influence est dite partielle car seule une partie des lignes de champ issues de (C_1) aboutit à(C_2).

b) Influence totale

Soient 2 conducteurs (C_1) et (C_2).

On dit qu'il y a « influence total » lorsque l'un des conducteurs entoure complètement l'autre conducteur.



Si Q_1 désigne la charge de (C_1) :

Scanned by CamScanner

- La face interne de (C_2) porte une charge $-Q_1$.
- La face externe de (C_2) porte :
  - Une charge Q_1 si (C_2) était initialement neutre.
  - Une charge $Q_1 + Q$ si (C_2) portait initialement une charge Q.

La répartition serait identique si (C_1) est un isolant.

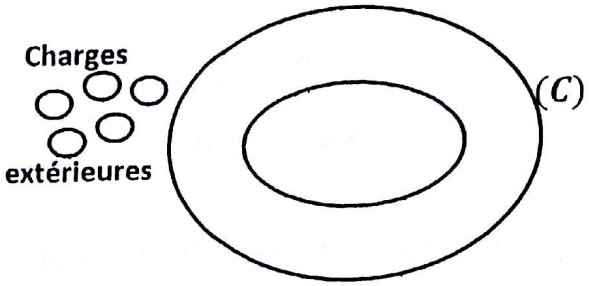
Si (C_2) est relié au sol, seule subsiste la charge $-Q_1$ sur la face interne de (C_2).

2. Effet d'écran

Notion d'écran

Soit un conducteur creux (C), à l'équilibre, fermé sans charges à l'intérieur de la cavité.

$\vec{E} = 0$ à l'intérieur de la cavité quelle que soit la répartition des charges extérieures.



Plaçons à l'intérieur de la cavité des charges $\Longrightarrow$ le champ $\vec{E}$ à l'intérieur de la cavité ne dépend que de ces charges $\Longrightarrow$ **la cavité est isolée (du point de vue électrostatique) du monde extérieur** :

Le conducteur creux constitue un écran pour la cavité.

- Ecran imparfait

Le conducteur creux constitue un écran pour la cavité mais pas pour le monde extérieur au conducteur.

En effet, si on change les charges de la cavité, on aura par influence une nouvelle répartition de charges sur la surface extérieure du conducteur.

$\Longrightarrow$ **Modification du champ et des charges extérieures.**

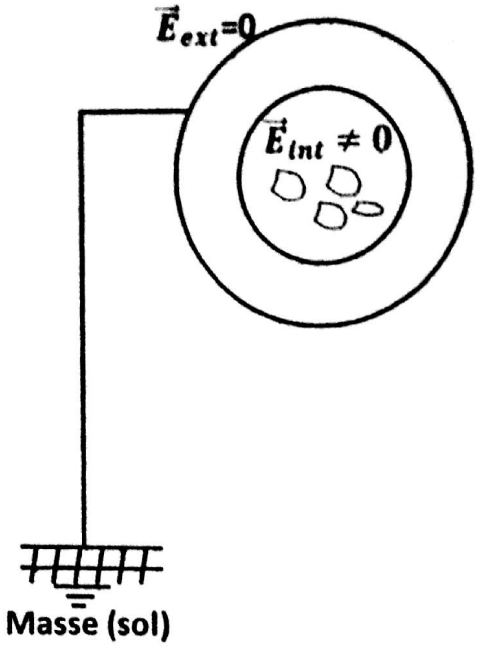
On dit qu'un conducteur creux isolé constitue un écran imparfait.

- Ecran parfait

On dit que l'écran est parfait si les deux distributions de charges intérieures et extérieures sont indépendantes l'une de l'autre.

Scanned by CamScanner

Il suffit de relier la face externe de (C) au sol (**on maintient le conducteur à un potentiel constant**) dans ce cas là le champ électrostatique à l'extérieur est nul même si la cavité contient des charges.



L'espace extérieur est protégé de toute influence électrostatique provenant de la cavité.

Conclusion : tout conducteur creux maintenu à un potentiel constant constitue un écran électrostatique parfait.

Un tel dispositif est appelé **cage de Faraday**.

VII. Capacité-condensateur

1. Capacité d'un conducteur isolé dans l'espace

- **Définition**

Soin un conducteur isolé dans le vide. Soit **Q** sa charge et **V** son potentiel.

Le rapport $\frac{Q}{V}$ est constant. On appelle $C = \frac{Q}{V}$ la capacité du conducteur isolé dans l'espace.

- **Unité :** $Coulomb/_{volt} = Farad\ (F)$

- **Exemple :**

Un conducteur sphérique de rayon **R** et portant une charge **Q** répartie uniformément sur sa surface.

Scanned by CamScanner

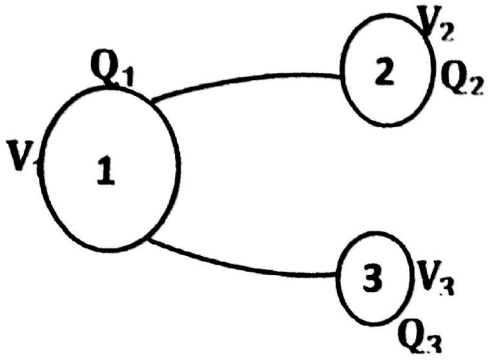
$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \Rightarrow C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 R$$

La capacité C ne dépend que la forme et des dimensions de la surface du conducteur.

2. Coefficients de capacité et d'influence d'un système de conducteurs.

Lorsqu'on a en présence n conducteur **(1), (2),..., (n)** caractérisés par des potentiels $V_1, V_2, \ldots, V_n$ ils s'influencent mutuellement et la charge de chaque conducteur dépend de la présence des autres conducteurs (phénomène d'influence).

Pour simplifier, on se limite à un système de trois conducteurs.



La charge (par exemple du **conducteur(1)**) est la somme de :

- La charge du **conducteur(1)** soumis au potentiel V_1 : Q_{11}
- La charge apparue, sur le **conducteur(1),** sous l'influence du **conducteur(2)** : Q_{12}
- La charge apparue, sur le **conducteur(1),** sous l'influence du **conducteur(3)** : Q_{13}

$$Q_1 = Q_{11} + Q_{12} + Q_{13} = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 + C_{13}V_3$$

De même pour les conducteurs (2) et (3).

$$Q_2 = Q_{21} + Q_{22} + Q_{23} = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 + C_{23}V_3$$

$$Q_3 = Q_{31} + Q_{32} + Q_{33} = C_{31}V_1 + C_{32}V_2 + C_{33}V_3$$

Scanned by CamScanner

$C_{ii}(C_{11}, C_{22}$ et $C_{33})$ est la capacité du conducteur(1) ou (2) Ou (3) en présence des autres conducteurs.

C_{ij} est le Coefficient d'influence du conducteur j sur le conducteur i en présences des autres conducteurs.

La relation entre les charges et les potentiels est une relation matricielle.

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

On généralise à :

$$[Q_i] = [C_{ij}][V_j]$$

On montre que : • $C_{ij} = C_{ji}$

- $C_{ij} < 0$
- $C_{ii} > 0$

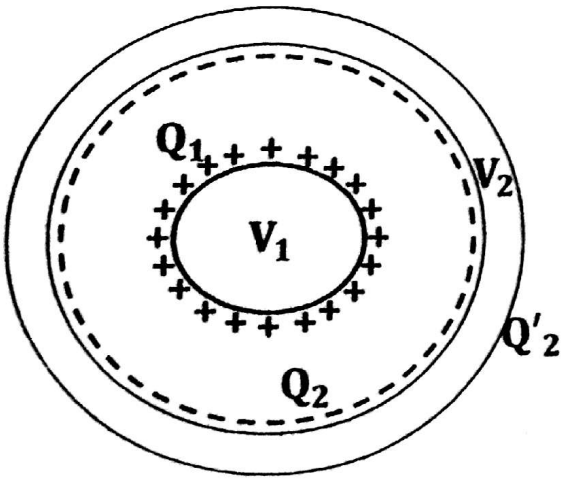
3. Condensateurs

Prenons la relation précédente pour 2 conducteurs.

$$Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2$$

$$Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2$$

Si le **conducteur(2)** entoure le **conducteur(1)**, l'influence est totale.



$$Q_2 = -Q_1$$

$$\Rightarrow -C_{11}V_1 - C_{12}V_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2$$

Scanned by CamScanner

Quels que soient V_1 et $V_2 \Rightarrow \begin{cases} C_{11} = -C_{21} \\ C_{22} = -C_{12} \end{cases}$

On a : $C_{12} = C_{21}$

$\Rightarrow C_{11} = C_{22} = -C_{12} = C$

$\Rightarrow Q_1 = CV_1 - CV_2 = C(V_1 - V_2)$

$Q_2 = -CV_1 + CV_2 = C(V_2 - V_1)$

La connaissance de la charge Q_1 (ou Q_2) et de la différence de potentiel $(V_1 - V_2)$ permet de déterminer la capacité C :

$$C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{Q_2}{V_2 - V_1} = \frac{-Q_2}{V_1 - V_2} = \frac{Q}{V_1 - V_2}$$

Avec $Q = Q_1 = -Q_2$

Les 2 conducteurs (1) et (2) placés en position d'influence totale forment un condensateur.

- Le **conducteur(1)** est l'armature interne.
- Le **conducteur(2)** est l'armature externe.

On appelle :

- Charge du condensateur$[Q]$, la charge de son armature interne(Q_1).
- Capacité du condensateur : $C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$

Les condensateurs classiques sont :

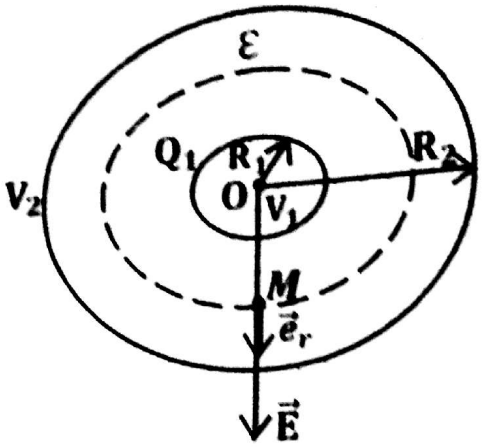
- Les condensateurs sphériques.
- Les condensateurs cylindriques.
- Les condensateurs plans.

4. Calcul de la capacité d'un condensateur

Lorsque des considérations de symétrie permettent de calculer (en appliquant le théorème de Gauss) le champ en un point de l'espace entre les deux armatures, le calcul de la capacité C peut se faire aisément.

Scanned by CamScanner

- **Condensateur sphérique.**



Les 2 armatures du condensateur sont 2 sphères concentriques de rayons R_1 et R_2

$\vec{E}$ est radial

- Le champ en un point M de l'espace entre les 2 armatures, et tel que $OM = r$, est calculé en utilisant le **théorème de Gauss**.

$$\oiint_{\mathcal{E}} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_o} \quad \Rightarrow \quad E.4\pi r^2 = \frac{Q_1}{\varepsilon_o}$$

$\mathcal{E}$: **Surface de Gauss**

$$\vec{E} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o r^2}\vec{e}_r$$

- La circulation de $\vec{E}$ entre les 2 armatures donne :

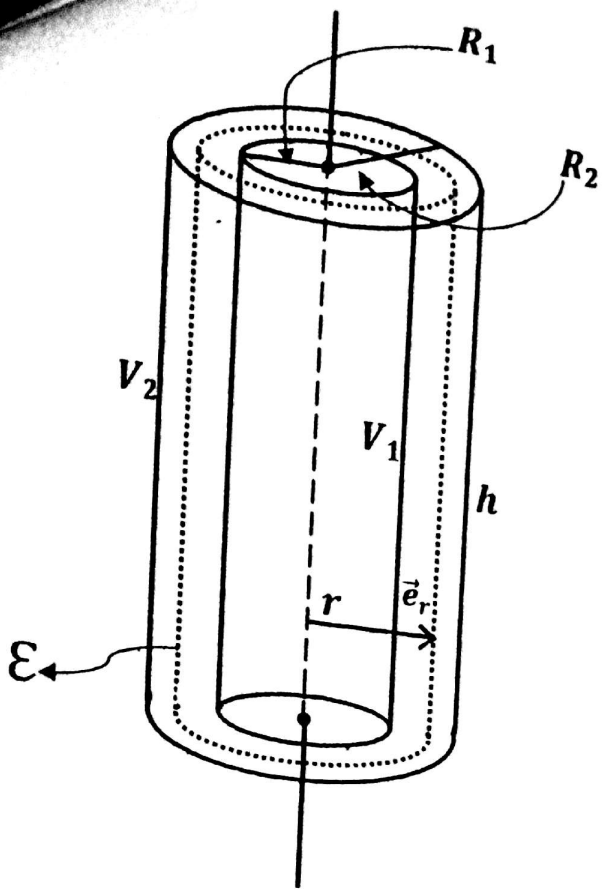
$$\int_{R_1}^{R_2} \vec{E}.\overrightarrow{dr} = \int_{V_1}^{V_2} -dV \quad \Rightarrow \quad V_1 - V_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right]$$

$$\Rightarrow \quad C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = 4\pi\varepsilon_o \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

- **Condensateur cylindrique**

Les armatures sont constituées par 2 cylindres coaxiaux de rayons R_1 et $R_2 > R_1$.

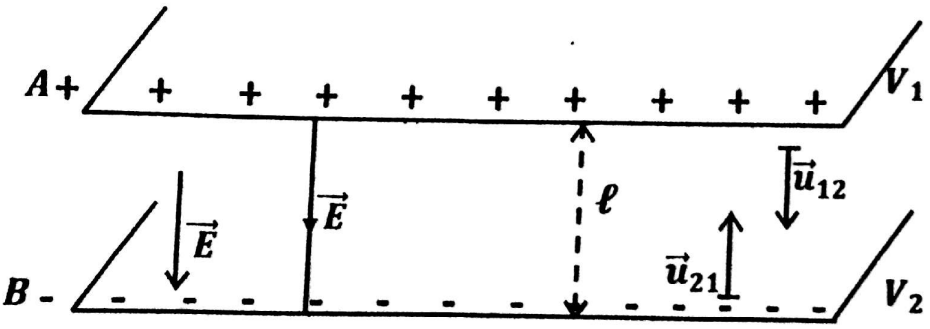
Scanned by CamScanner



- **Théorème de Gauss :**
- $\oiint_{\mathcal{E}} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_o}$
- $\Rightarrow E\,2\pi rh = \frac{Q_1}{\varepsilon_o}$
- $\vec{E} = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_o rh}\vec{e}_r$
- $\Rightarrow \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}.\overrightarrow{dr} = -\int_{V_1}^{V_2} dV \Rightarrow V_1 - V_2 = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_o h} ln\frac{R_2}{R_1}$
- $\Rightarrow C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\varepsilon_o h}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$

- **Condensateur plan**

Les armatures sont constituées par **2** plans parallèles de surface S distance de ℓ.



On suppose l'armature A à V_1 chargée positivement d'une densité $+\sigma$ et l'armature B à V_2 chargée d'une densité $-\sigma$.

- **L'armature A crée $\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\vec{u}_{12}$**
- **L'armature B crée $\vec{E}_2 = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_o}\vec{u}_{21}$**
- $\vec{u}_{12} = -\vec{u}_{21}$

Le champ total crée entre les **2 armatures** :

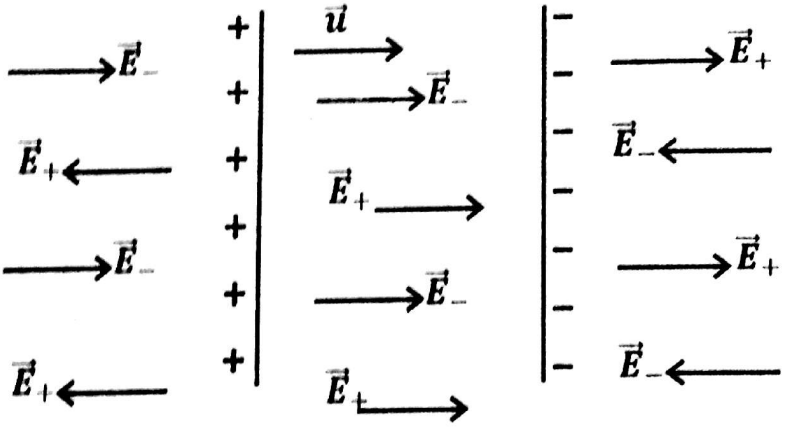
Scanned by CamScanner

- $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\vec{u}_{12} + \left(\frac{-\sigma}{2\varepsilon_o}\right)(-\vec{u}_{12})$
-
- $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}\vec{u}_{12}$

La circulation du champ entre les **2 armatures** :

- $\int_A^B \vec{E}.\vec{dl} = \int_{V_1}^{V_2} dV$
-
- $V_1 - V_2 = E.\ell = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}\ell = \frac{Q\ell}{S\varepsilon_o}$
-
- $\Longrightarrow \quad C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{\varepsilon_0 S}{\ell}$
-
- **Remarque :**

- Le champ total créé entre les 2 armatures planes est la somme des champs de même sens : $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}$
- En dehors des armatures le champ est nul. (somme des champs de sens inverses)



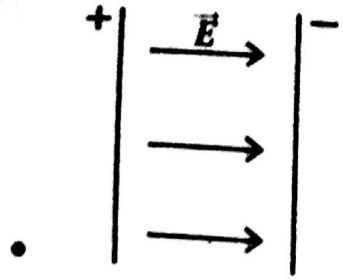
Les champs s'ajoutent entre les plans et se compensent ailleurs pour s'annuler.

Le champ est donc uniforme entre 2 plans.

Ce type de champ uniforme peut être rencontré dans :

- Les membranes de cellules.
- Entre 2 plaques métalliques.

Scanned by CamScanner



Si on place une particule chargée, par exemple un électron, entre ces plaques, elle se met à se déplacer sous l'effet d'une force constante, $\vec{F} = e\vec{E}$ dûe au champ constant et donc l'électron aura une accélération constante.

Cette propriété est utilisée en pratique dans l'oscilloscope.

5. Energie emmagasinée dans un condensateur

Un condensateur chargé emmagasine de l'énergie électrique. Si on connecte les armatures par un fil conducteur, des électrons vont se déplacer dans le fil, de l'armature négative à l'armature positive.

Cet écoulement de charge appelé courant continu ne s'arrête que quand les armatures redeviennent neutres. Il peut être utilisé pour faire fonctionner un flash électronique ou déclencher un stimulateur cardiaque.

Ainsi de l'énergie électrique emmagasinée peut être transformée en d'autres formes d'énergie.

L'énergie accumulée dans un condensateur peut être fournie initialement par une pile ou une batterie qui maintient une $d.d.p$ entre ses deux bornes.

L'énergie totale accumulée dans un condensateur est donnée par :

$$W = \frac{1}{2}[QV_1 - QV_2] = \frac{1}{2}Q(V_1 - V_2)$$

Posons $V_1 - V_2 = U$

$$w = \frac{1}{2}Q(U) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}C(U)^2$$

$$C = \frac{Q}{U}$$

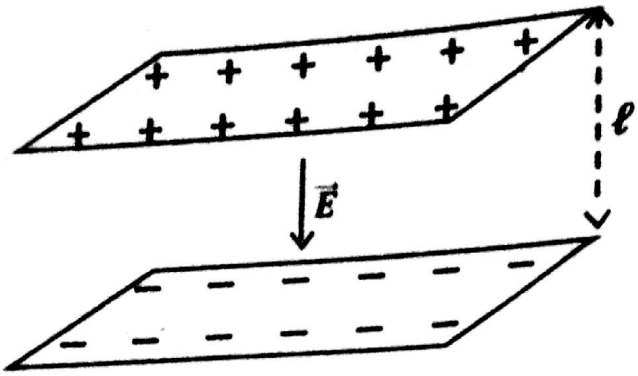
6. Densité d'énergie électrostatique

Considérons un condensateur plan (pour simplifier)

S: Surface de chaque armature.

ℓ: Distance entre les 2 armatures.

Scanned by CamScanner



$S.\ell$ = Volume du condensateur

L'énergie emmagasinée dans ce condensateur est :

$W = \frac{1}{2}CU^2$ U: $d.d.p$ Entre les 2 armatures

Or $C = \frac{\varepsilon_o S}{\ell} \Rightarrow W = \frac{1}{2}\varepsilon_o \frac{SU^2}{\ell}$

Le champ entre les armatures est : $E = \frac{U}{\ell}$

$\Rightarrow W = \frac{1}{2}\varepsilon_o E^2.S.\ell$

L'énergie emmagasinée dans le condensateur, par unité de volume est appelée densité d'énergie ω

$$\omega = \frac{1}{2}\varepsilon_o E^2$$

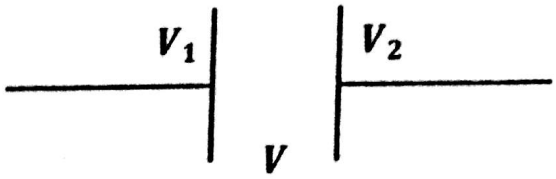
Remarque :

$\omega = \frac{1}{2}\varepsilon_o E^2$ est valable quelque soit le condensateur. Ce résultat est aussi valable dans le cas général : si un champ E est appliqué en un point de l'espace, ou peut lui associer

$\omega = \frac{1}{2}\varepsilon_o E^2$

7. Association de condensateur

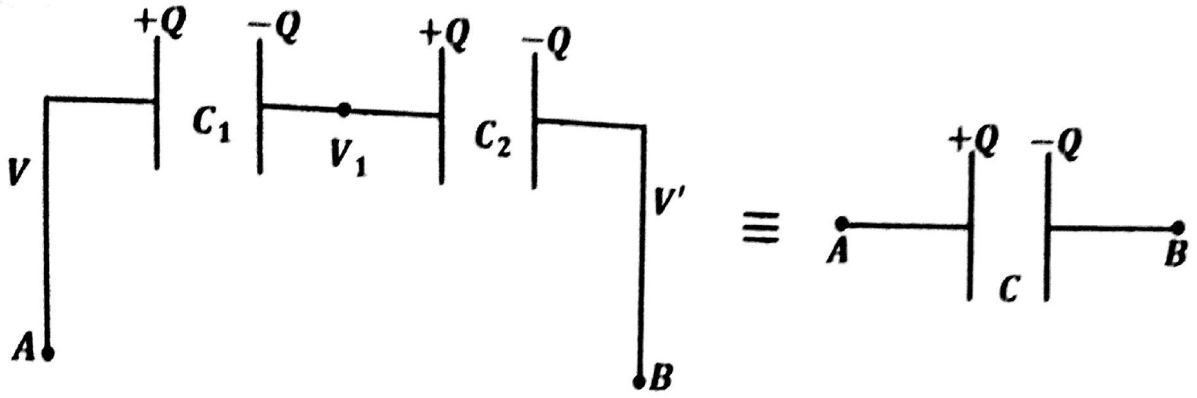
Dans le cas général, on convient de représenter, de façon symbolique, un condensateur par 2 traits parallèles.



$V = V_1 - V_2$

Scanned by CamScanner

- Association en série



$$V - V_1 = \frac{Q}{C_1}$$

$$V_1 - V' = \frac{Q}{C_2}$$

$$\Rightarrow \quad V - V' = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$$

En reliant A et B (on décharge le système), on recueille la charge Q.

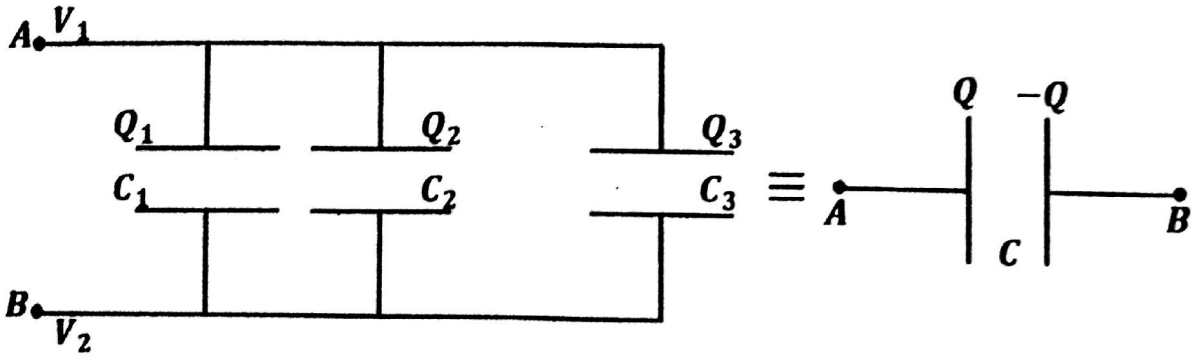
Le condensateur équivalent, aux 2 condensateurs en série, a une capacité C :

$$Q = C(V - V') \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Lorsqu'on a un nombre n de condensateurs en série, la relation devient :

$$\frac{1}{C} = \sum_{i}^{n} \frac{1}{C_i}$$

Association en parallèle



Chaque condensateur, a une armature à un potentiel V_1 et l'autre armature à un potentiel V_2.

Scanned by CamScanner

$V = V_1 - V_2$

$Q_1 = C_1 V$; $Q_2 = C_2 V$; $Q_3 = C_3 V$

La charge totale du système est :

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

Lors de la décharge (en reliant A et B) ou recueille Q.

Le condensateur équivalent au système a une capacité C:

$$Q = CV = Q_1 + Q_2 + Q_3 = C_1 V + C_2 V + C_3 V$$

$$\Rightarrow \quad C = C_1 + C_2 + C_3$$

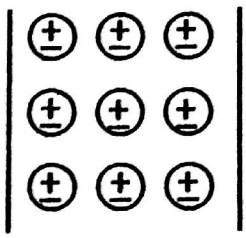
8. Effet des diélectriques

Diélectrique = un isolant = mauvais conducteur des charges électriques.

Si on introduit un isolant ou diélectrique entre les armatures d'un condensateur, sa capacité augmente.

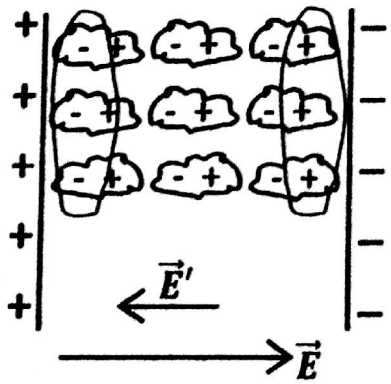
Explication :

Lorsque le condensateur est non chargé c'est-à-dire $E = 0$, les molécules du diélectrique ont les centres des charges positives confondus avec les centres des charges négatives.



$\vec{E} = 0$

Quand on applique un champ électrique extérieur $\vec{E}$, les centres des charges se séparent d'une distance proportionnelle à l'intensité du champ $\vec{E}$.



A l'intérieur du diélectrique, les effets

des charges déplacées, positives et négatives se compensent.

Scanned by CamScanner

Cependant, il y a apparition de charges négatives du côté de l'armature positive et de charges positives du côté de l'armature négative.

Ceci produit un champ électrique $\vec{E}'$ dirigé dans le sens apposé à $\vec{E}$.

Ainsi le champ électrique se réduit à une valeur efficace $E_{eff} = E - E'$

Puisque la séparation des charges augmente avec E, E' est également proportionnel à E.

$$E_{eff} = \frac{1}{\varepsilon_r} E$$

ε_r est la constante diélectrique. C'est un nombre sans dimension qui indique la réduction du champ électrique due au diélectrique.

$\varepsilon_r = 1$ pour le vide, $\varepsilon_r > 1$ pour un diélectrique

Exemple :

Pour le papier : $\varepsilon_r = 3,5$

Pour les plastiques : $3 \leq \varepsilon_r \leq 20$

Pour l'air sec : $\varepsilon_r = 1,00059$

Pour le verre : $5 \leq \varepsilon_r \leq 10$

Pour l'eau pure : $\varepsilon_r = 78$

Le champ E diminue lorsqu'on insère un diélectrique.

Puisque E est proportionnel à la $d.d.p\ U$ donc U diminue aussi.

$C = \frac{Q}{U}$ augmente d'un facteur égale à ε_r

Exemple : condensateur à lames parallèles.

$$\text{à } vide: C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{\ell} \quad ; \quad diéléctrique \quad C = \varepsilon_r \frac{\varepsilon_0 S}{\ell} = \varepsilon_0 C_0$$

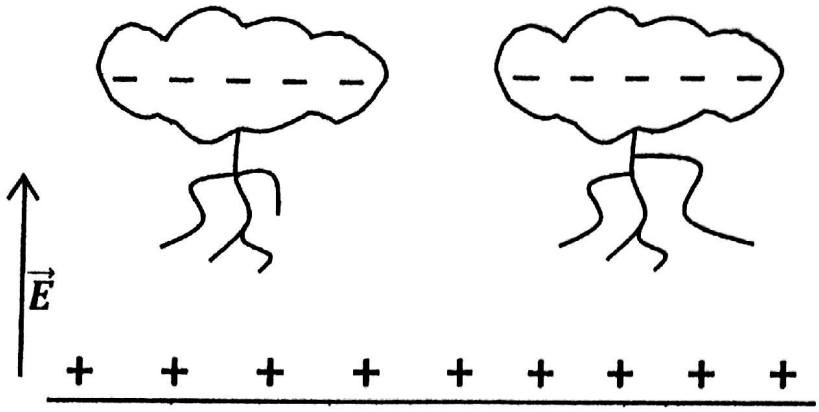
En général : en présence d'un diélectrique on remplace la constante ε_0 par $\varepsilon_r \varepsilon_0$.

Scanned by CamScanner

- Cas où le champ électrique dans un diélectrique devient fort.

Quand le champ électrique dans un diélectrique devient suffisamment fort, il peut produire un nombre élevé d'électrons libres et d'ions et la substance devient un bon conducteur. On dit qu'il y a un **claquage** qui se produit à un champ électrique critique appelé la rigidité diélectrique.

Exemple : l'éclair est un exemple spectaculaire de ce phénomène dans lequel l'air devient un excellent conducteur.



Quand des nuages bas accumulent des charges, il y a une $d.d.p$ entre le nuage et le sol.

Si cette $d.d.p$ est suffisamment élevée le champ électrique dépasse la rigidité diélectrique de l'air. L'air s'ionise et devient un bon conducteur électrique.

Remarque :

Les condensateurs commerciaux sont marqués du voltage maximum qui peut leur être appliqué pour ne pas dépasser la rigidité diélectrique et abîmer le condensateur.

Scanned by CamScanner